Présentation et étude de la fonction arctan

On rappelle le théorème de la bijection dérivable :

Soit f une fonction réelle dérivable définie sur un intervalle I non singulier[1].

Si $\forall x \in I, f'(x) > 0$ alors f réalise une bijection de I sur un intervalle J de même type[2] et dont les extrémités sont les limites de f aux extrémités de I.

Si $\forall x \in I, f'(x) < 0$ alors f réalise une bijection de I sur un intervalle J de type inversé[3] et dont les extrémités sont les limites de f aux extrémités de I.

Pour la résolution du problème qui suit le théorème ci-dessus s'avère utile, on précisera chaque fois que celui-ci est employé. De plus, afin d'éviter tout manque de rigueur, on prendra soin de préciser chaque fois le domaine d'évolution des variables employées par des expressions du type $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists x \in \mathbb{R}$, etc...

Dans ce problème on notera I l'intervalle réel $]-\pi/2, \pi/2[$.

Partie I – Présentation de la fonction arc tangente.

1. On considère l'application $f: I \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \tan x$.
   Montrer que f réalise une bijection de I sur $\mathbb{R}$.

2. On considère g la primitive définie sur $\mathbb{R}$ de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ s'annulant en 0.

2.a Calculer la dérivée de l'application $g \circ f$.

2.b En déduire que g est l'application réciproque de f.

Cette fonction g est appelée fonction arc tangente et est usuellement notée $\arctan$.

3.a En exploitant l'imparité de f, montrer que $\arctan$ est elle aussi une fonction impaire.

3.b Préciser les valeurs de $\arctan(x)$ pour $x = 0$, $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $x = 1$ et $x = \sqrt{3}$.

3.c Quelle est la limite de $\arctan$ en $+\infty$?

3.d Former l'équation de la tangente à la courbe représentative de $\arctan$ au point d'abscisse $x = 0$.
Etudier la position relative de la courbe par rapport à cette tangente.

4. Réaliser une représentation de $\arctan$ dans un repère orthonormé en prenant pour unité 2 cm.

Partie II – Quelques propriétés de la fonction arctan.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

1.a Calculer $\tan(\arctan x)$.

1.b Etablir que pour tout $t \in I$, $1 + \tan^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t}$.

1.c En déduire une expression simplifiée de $\cos(\arctan x)$ puis de $\sin(\arctan x)$.

2. Etablir que $\forall x > 0, \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ puis que $\forall x < 0, \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2}$

Partie III – Formule de Leibniz.

---

[1] Un intervalle non singulier est un intervalle non vide et non réduit à un point.

[2] J de même type que I signifie que si I est de la forme $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$ respectivement $]a,b[$ alors J est de la forme $[\alpha,\beta]$, $[\alpha,\beta[$, $]\alpha,\beta]$ respectivement $]\alpha,\beta[$.

[3] J de type inversé par rapport à I signifie que si I est de la forme $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$ respectivement $]a,b[$ alors J est de la forme $[\alpha,\beta]$, $]\alpha,\beta]$, $[\alpha,\beta[$ respectivement $]\alpha,\beta[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}$.

On désire établir que $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\pi}{4}$ résultat connu sous le nom de formule de Leibniz.

1. Calculer $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$.

2. On considère $n \in \mathbb{N}$.

2.a Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^{2n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} = \frac{1 + (-1)^n x^{2n+1}}{1+x^2}$.

2.b En déduire que $S_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$

2.c Etablir que : $0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2} \, \mathrm{d}x \leq \frac{1}{2n+2}$

2.d En déduire que $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\pi}{4}$.